ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ[1]

21 Ιουνίου 2012

Ονοματεπώνυμο.. Α.Μ............................

---

1) α) (1 μονάδα) Τι ονομάζουμε συντεταγμένη επιφάνεια ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων u^i; Δώστε τον ορισμό της φυσικής και της αντίστροφης φυσικής βάσης ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων u^i. Τα διανύσματα ποιάς από τις δυο παραπάνω βάσεις είναι κάθετα στις συντεταγμένες επιφάνειες;
β) (1,5 μονάδες) Έστω θ ένα μονόμετρο μέγεθος που χαρακτηρίζει ένα συνεχές μέσο, και $\theta = \theta(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$ οι εκφράσεις του μέσω των μεταβλητών του Lagrange και του Euler αντίστοιχα. Να δώσετε τον ορισμό της ολικής (ή σωματιακής) και της τοπικής παραγώγου του μεγέθους θ. Να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει τις δυο αυτές παραγώγους.

Λύση: α) Σελ. 1 και εξίσωση § 1 (1). Σελ. 2-3 και εξισώσεις § 1 (5) και (6). β) Σελ. 50-52 και εξισώσεις § 14 (5), (7) και (8). Οι παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο των Ι.Δ. Χατζηδημητρίου και Γ.Δ. Μπόζη: 'Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων'.

2) Το πεδίο ταχυτήτων συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$u_1 = -e^{-t}\xi^2, \quad u_2 = -\xi^3, \quad u_3 = 2t,$$

όπου t ο χρόνος, και (ξ^1, ξ^2, ξ^3) οι μεταβλητές του Lagrange. Να βρεθούν οι συνιστώσες α_1, α_2, α_3 της επιτάχυνσης συναρτήσει των μεταβλητών (x_1, x_2, x_3) του Euler.

Λύση: Η ταχύτητα δίνεται συναρτήσει των μεταβλητών του Lagrange, οπότε η επιτάχυνση συναρτήσει των ίδιων μεταβλητών είναι:

$$\alpha_1 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{\xi^i} = e^{-t}\xi^2, \quad \alpha_2 = \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{\xi^i} = 0, \quad \alpha_3 = \left(\frac{du_3}{dt}\right)_{\xi^i} = 2. \tag{1}$$

Επομένως για να εκφράσω τις συνιστώσες της επιτάχυνσης ως συνάρτηση των μεταβλητών του Euler αρκεί να εκφράσω το ξ^2 συναρτήσει των (x_1, x_2, x_3).

Από τις εκφράσεις των ταχυτήτων έχουμε:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -e^{-t}\xi^2 \Rightarrow \int dx_1 = -\int e^{-t}\xi^2 dt \Rightarrow x_1 = e^{-t}\xi^2 + c_1.$$

Η σταθερά c_1 προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες $x_1 = \xi^1$ για $t = 0$, οπότε $c_1 = \xi^1 - \xi^2$ και τελικά

$$x_1 = e^{-t}\xi^2 + \xi^1 - \xi^2. \tag{2}$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε εύκολα:

[1] Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Η σελίδα των θεμάτων επιστρέφεται μαζί με τις απαντήσεις.

Η διάρκεια των εξετάσεων είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

$$x_2 = -\xi^3 t + \xi^2, \tag{3}$$

$$x_3 = t^2 + \xi^3. \tag{4}$$

Από την (4) βρίσκουμε $\xi^3 = x_3 - t^2$. Βάζοντας αυτή τη σχέση στην (3) παίρνουμε $\xi^2 = x_2 + x_3 t - t^3$. Οπότε τελικά για τις συνιστώσες της επιτάχυνσης έχουμε από την (5):

$$\alpha_1 = e^{-t}\left[x_2 + x_3 t - t^3\right], \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2. \tag{5}$$

3) Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1' &= (1+a)x_1 + a(x_2^2 + x_3^2) \\ x_2' &= (1+a)x_2 + a(x_3^2 + x_1^2) \\ x_3' &= (1+a)x_3 + a(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

όπου $0 < a \ll 1$.
α) (0,5 μονάδες) Να εξεταστεί αν η παραμόρφωση είναι απειροστή ή πεπερασμένη και να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης.
β) (1,5 μονάδες) Να βρεθούν τρείς διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με αρχή το σημείο $A(1,1,-1)$, των οποίων η καθετότητα να διατηρείται και μετά την παραμόρφωση. Ποιος είναι ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης κατά μήκος των τριών αυτών διευθύνσεων;
γ) (0,5 μονάδες) Να βρεθεί ο συντελεστής κυβικής διαστολής στο σημείο Α. Λόγω της παραμόρφωσης ο όγκος μιας απειροστής σφαίρας που βρίσκεται στο σημείο Α θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει αμετάβλητος;

Λύση: α) Τα διανύσματα μετατόπισης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1' - x_1 = a(x_1 + x_2^2 + x_3^2) = a w_1' \\ w_2 &= x_2' - x_2 = a(x_2 + x_3^2 + x_1^2) = a w_2' \\ w_3 &= x_3' - x_3 = a(x_3 + x_1^2 + x_2^2) = a w_3' \end{aligned}$$

Μια παραμόρφωση είναι απειροστή όταν $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} \ll 1$. Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} = a\dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j} = ak \ll 1$ διότι $k = \dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j}$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Επομένως η παραμόρφωση είναι απειροστή.

Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης δίνονται από τις σχέσεις $\epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i}\right]$. Οπότε ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\epsilon_{ij})_{(x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} a & a(x_1+x_2) & a(x_1+x_3) \\ a(x_1+x_2) & a & a(x_2+x_3) \\ a(x_1+x_3) & a(x_2+x_3) & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

β) Ο τανυστής παραμόρφωσης για το σημείο $A(1,1,-1)$ είναι

$$(\epsilon_{ij})_A = \begin{pmatrix} a & 2a & 0 \\ 2a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Οι ζητούμενες διευθύνσεις καθορίζονται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα (7). Οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 2a & 0 \\ 2a & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-(2a)^2\right] = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(-a-\lambda)(3a-\lambda) = 0,$$

και είναι

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -a, \quad \lambda_3 = 3a. \tag{8}$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = a$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2ax_2 = 0 \\ 2ax_1 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Θέτοντας αυθαίρετα $x_3 = 1$ παίρνω ένα ιδιοδιάνυσμα της μορφής

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα και για τις 2 άλλες ιδιοτιμές βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Τα 3 αυτά ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, αφού τα εσωτερικά τους γινόμενα είναι μηδέν.

Ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης l_i κατά μήκος των τριών αυτών αξόνων ισούται με την εκάστοτε ιδιοατιμή. Επομένως έχουμε συστολή μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα $\vec{X}_2$ αφού

$$l_1 = \lambda_1 = a > 0, \quad l_2 = \lambda_2 = -a < 0, \quad l_3 = \lambda_3 = 3a > 0. \tag{12}$$

γ) Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης ο συντελεστής κυβικής διαστολής θ ισούται με το ίχνος του ο τανυστή παραμόρφωσης (7)

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3a > 0. \tag{13}$$

Επειδή ο συντελεστής κυβικής διαστολής είναι θετικός καταλαβαίνουμε ότι ο όγκος της απειροστής σφαίρας θα αυξηθεί.

4) Η κατάσταση τάσης σε συνεχές μέσο καθορίζεται από τον τανυστή τάσης:

$$p_{11} = kx_3, \quad p_{12} = -kx_2, \quad p_{13} = -kx_1, \quad p_{22} = kx_1, \quad p_{23} = -kx_3, \quad p_{33} = kx_2,$$

όπου k σταθερά. Να υπολογιστεί η συνολική επιφανειακή δύναμη που ασκείται στο υλικό ημικύκλιο $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 \geq 0$, που βρίσκεται στο επίπεδο $x_3 = 0$. Σημείωση: Το στοιχείο επιφάνειας σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) είναι $d\sigma = \rho d\rho d\theta$.

Λύση: Η γενική μορφή του τανυστή τάσης είναι

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} kx_3 & -kx_2 & -kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & -kx_3 \\ -kx_1 & -kx_3 & kx_2 \end{pmatrix}.$$

Για επιφάνειες στο επίπεδο (x_1, x_2), δηλαδή για $x_3 = 0$, ο τανυστής τάσης παίρνει τη μορφή

$$(T12_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -kx_2 & -kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \\ -kx_1 & 0 & kx_2 \end{pmatrix},$$

και η αντίστοιχη τάση είναι

$$\vec{p} = T12\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -kx_2 & -kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \\ -kx_1 & 0 & kx_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} -kx_1 \\ 0 \\ kx_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p} = -kx_1\vec{e_1} + kx_2\vec{e_3}.$$

Η ζητούμενη δύναμη βρίσκεται από το ολοκλήρωμα $\vec{F} = \iint \vec{p} d\sigma$. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται πολύ εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, οπότε σύμφωνα με τη σημείωση έχουμε $d\sigma = \rho d\rho d\theta$. Τελικά για την δύναμη βρίσκουμε

$$\vec{F} = \iint \vec{p} d\sigma = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-k\rho\cos\theta\vec{e_1} + k\rho\sin\theta\vec{e_3}\right) \rho d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^1 \left(-k\rho^2 \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{e_1} + k\rho^2 \left[-\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) d\rho = -\int_0^1 2k\rho^2\vec{e_1} d\rho = -\frac{2k}{3}\vec{e_1}$$

.